

Операции над изображениями

- Точечные
- Пространственные
- Алгебраические
- Геометрические

Алгебраические операции

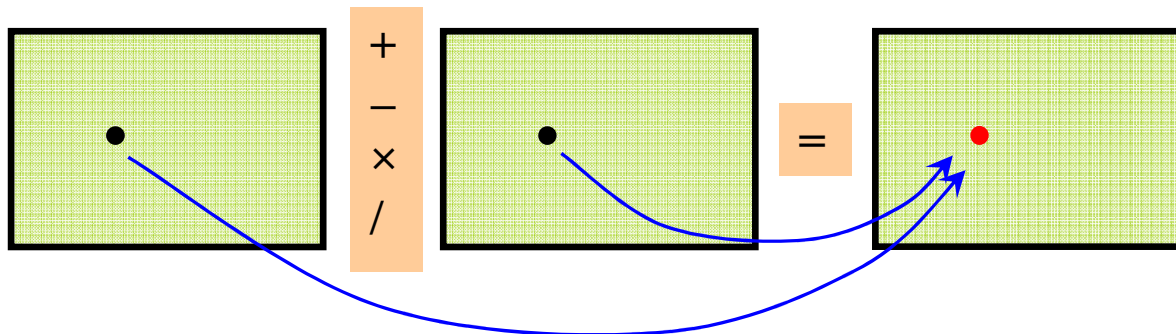
Составляют новое изображение из поточечных сумм, разностей, произведений и частных двух исходных изображений.

Сумма: $C(x, y) = A(x, y) + B(x, y)$

Разность: $C(x, y) = A(x, y) - B(x, y)$

Произведение: $C(x, y) = A(x, y) \cdot B(x, y)$

Частное: $C(x, y) = A(x, y) / B(x, y)$



Сложение

Используется для:

- осреднения множественных изображений одной и той же сцены с целью уменьшения влияния случайного шума;
- для выделения содержимого одного образа над другим, создания эффекта двойной ЭКСПОЗИЦИИ.

Уменьшение шума

Приложение - астрономия



$D_i(x, y) = S(x, y) + N_i(x, y), \quad i = 1, \dots, m$ - множество образов

$S(x, y)$ - образ, $N_i(x, y)$ - шум.

Шум некоррелированный и имеет нулевое среднее значение:

$$E[N_i(x, y)] = 0$$

Отношение мощностей сигнал/шум вырастает в $\sqrt{m}$ раз:

$$P(x, y) = \frac{S^2(x, y)}{E[N^2(x, y)]}$$

При осреднении m образов

$$\bar{D}(x, y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (S(x, y) + N_i(x, y))$$

имеем

$$\begin{aligned} \bar{P}(x, y) &= \frac{S^2(x, y)}{E\left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (S(x, y) + N_i(x, y))\right]^2} = \\ &= \frac{m^2 S^2}{E\left[\sum_{i=1}^m N_i^2\right] + E\left[\sum_{i,j=1; i \neq j}^m N_i \cdot N_j\right]} = \frac{m^2 S^2}{\sum_{i=1}^m E[N_i^2]} = m \cdot P(x, y) \end{aligned}$$

Вывод

$S(x, y)$ - образ,

$N_i(x, y)$ - шум,

$\overline{D}(x, y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (S(x, y) + N_i(x, y))$ - осреднённый образ,

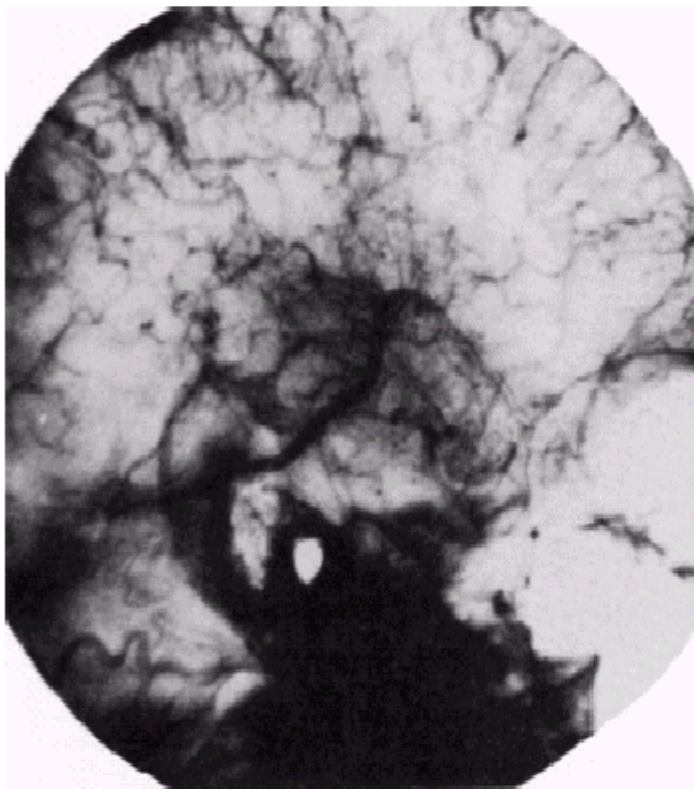
$\sqrt{\overline{P}(x, y)} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{P(x, y)}$ - отношение «сигнал/шум» возрастает в $\sqrt{m}$ раз.

Вычитание

Используется для

- удаления нежелательного образа из изображения (медленно меняющийся фон, периодический шум, другие аддитивные помехи);
- определение изменений между двумя изображениями одной и той же сцены.

Выделение образа на фоне

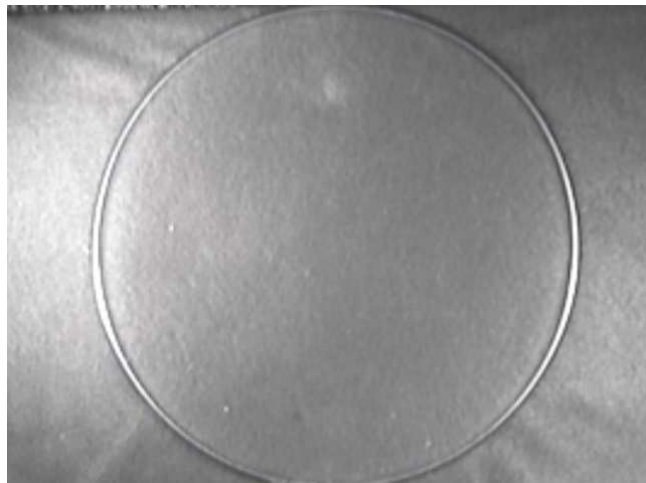


Исходное
изображение



Изображение с вводом
контрастного вещества и
вычитанием исходного

Сегментация изображения



Фон $B(x, y)$



Образ $A(x, y)$



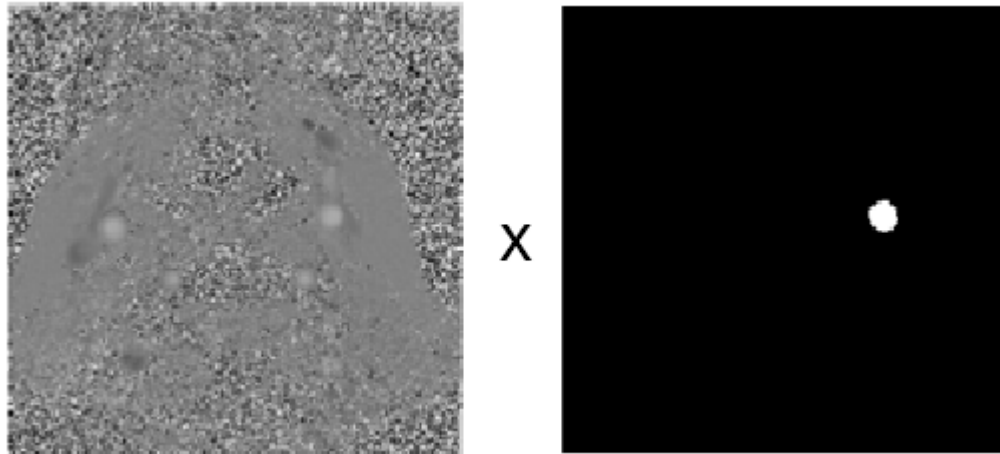
Вычитание $A(x, y) - B(x, y)$



Умножение $k \cdot A(x, y)$

Умножение

Используется для выделения с помощью маски областей, которые не должны учитываться при вычислениях.



Магнитно-резонансная томограмма шеи человека (слева) умножается на маску (справа), в результате чего выделяются пиксели, соответствующие одной из артерий. Осреднение яркости пикселей внутри выделенной области и умножение на площадь области даёт возможность оценить средний кровоток через артерию.

Деление

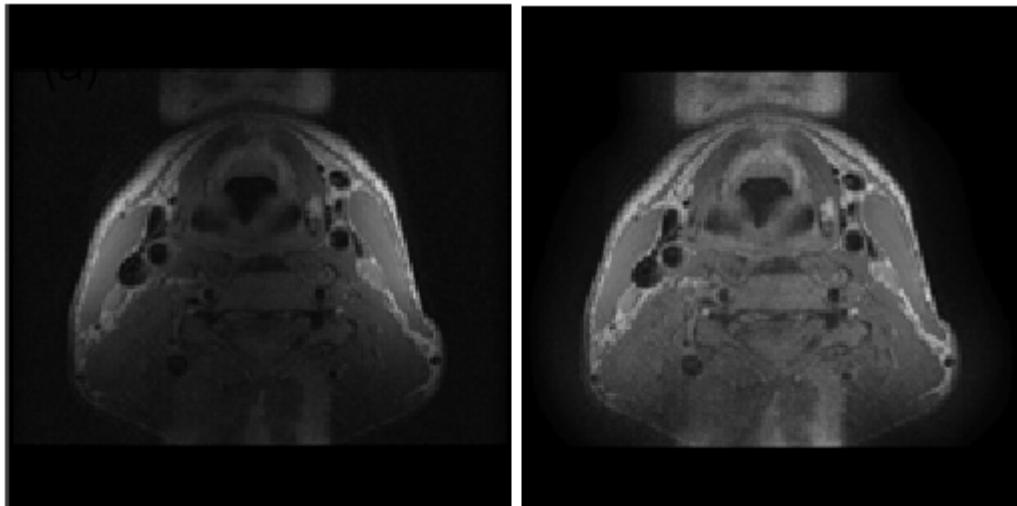
Формирование изображения часто можно рассматривать, как мультипликативный процесс:

$$A(x, y) = I(x, y) \cdot R(x, y).$$

$A(x, y)$ - наблюдаемое изображение

$I(x, y)$ - низкочастотная помеха (неравномерное освещение)

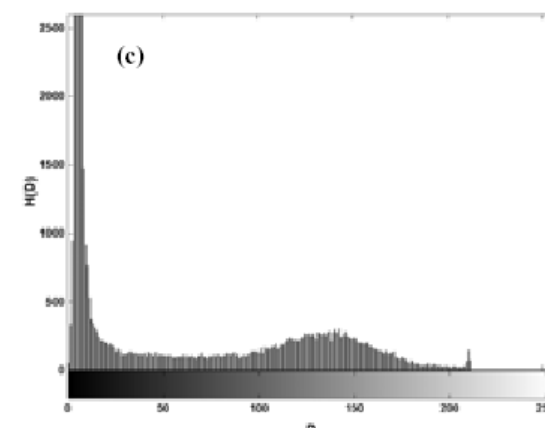
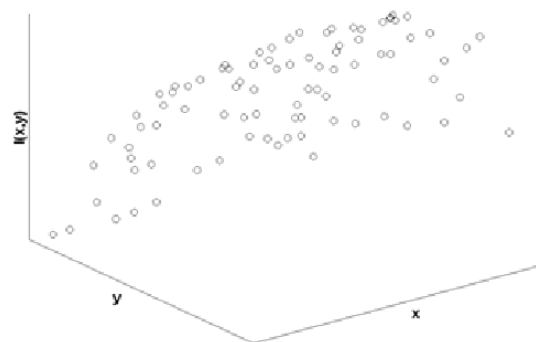
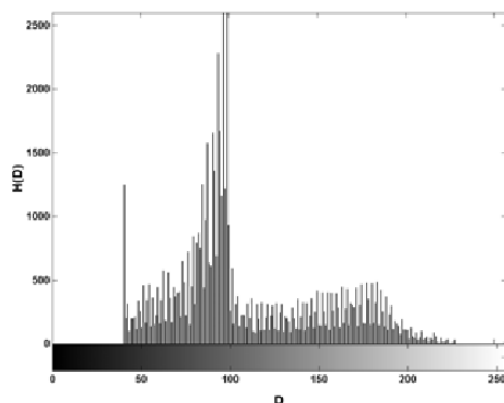
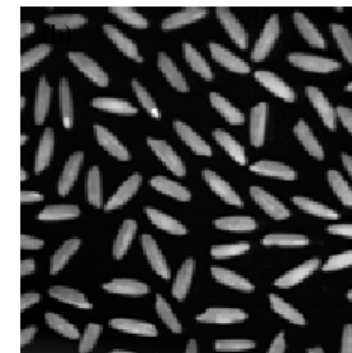
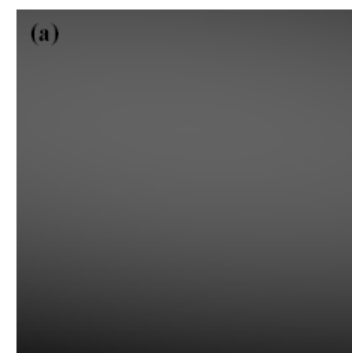
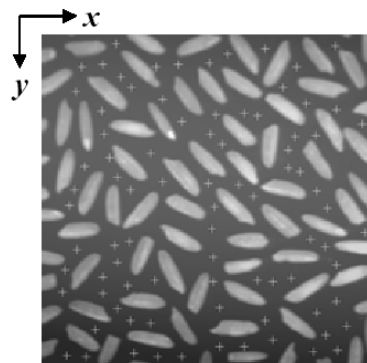
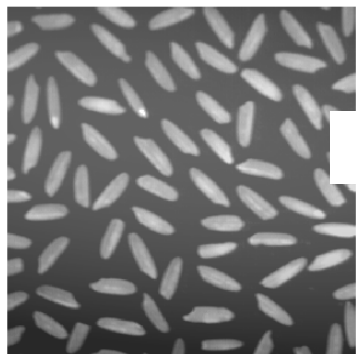
$R(x, y)$ - нужная компонента изображения



1. Оценить компоненту $I(x, y)$
2. Разделить $A(x, y)$ на $I(x, y)$

На левом рисунке изображение кровотока через шею, полученное с помощью магнитно-резонансного томографа. На правом – улучшенное изображение с помощью операции деления.

Удаление фона



Изображение и его гистограмма яркости.

Фоновые пиксели и распределение их яркости

Модель фоновой яркости и результат деления изображений

Модель фоновой яркости

$$B(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy$$

$(x_i, y_i), i = 1, \dots, k$ - выбранные фоновые пиксели,

$c_i = I(x_i, y_i)$ - яркость выбранных фоновых пикселей.

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

$$C(a_0, \dots, a_5) = \sum_{i=1}^k (c_i - B(x_i, y_i))^2$$

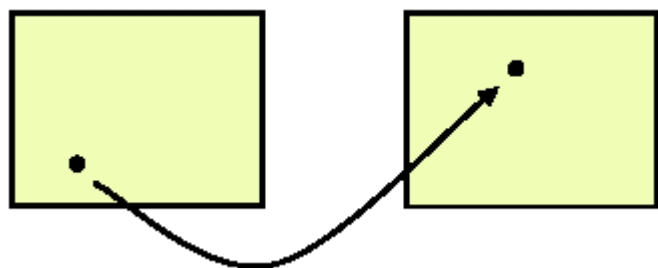
$\frac{\partial C}{\partial a_i} = 0, i = 0, \dots, 5$ - система линейных уравнений

Геометрические операции



Геометрические операции меняют пространственные отношения между объектами в изображении.

Геометрические операции



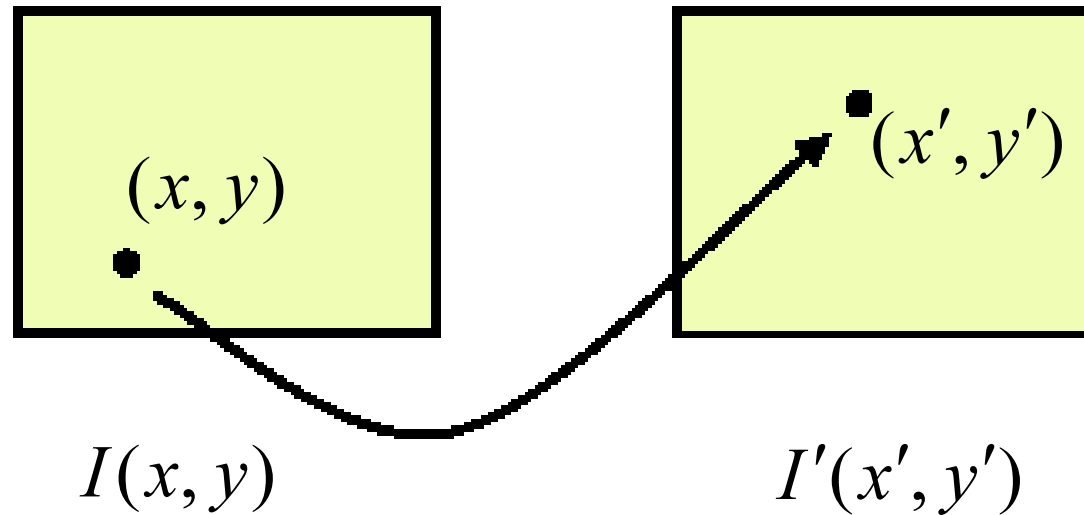
- 4. Результат зависит только от координат пикселя
- 5. Результат не зависит от окружающих пикселей
- 6. Результат не зависит от контекста изображения
- 7. Пример: $I'(x,y) = I(x+a, y+b)$

Геометрические операции

$$x \rightarrow f_x(x, y) = x'$$

$$y \rightarrow f_y(x, y) = y'$$

$$I(x, y) = I'(f_x(x, y), f_y(x, y))$$



Прямое отображение

$$x \rightarrow f_x(x, y) = x'$$

$$y \rightarrow f_y(x, y) = y'$$



Прообраз

Образ

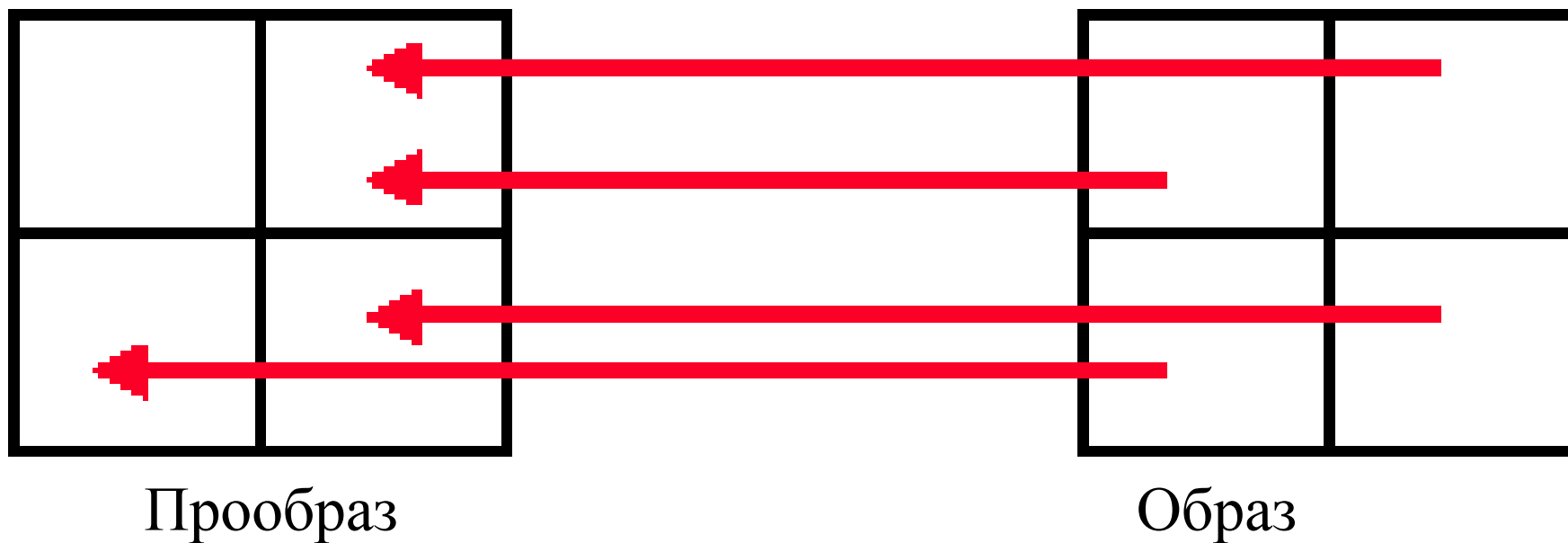
Основные проблемы:

пропуск или перекрытие пикселей образа

Обратное отображение

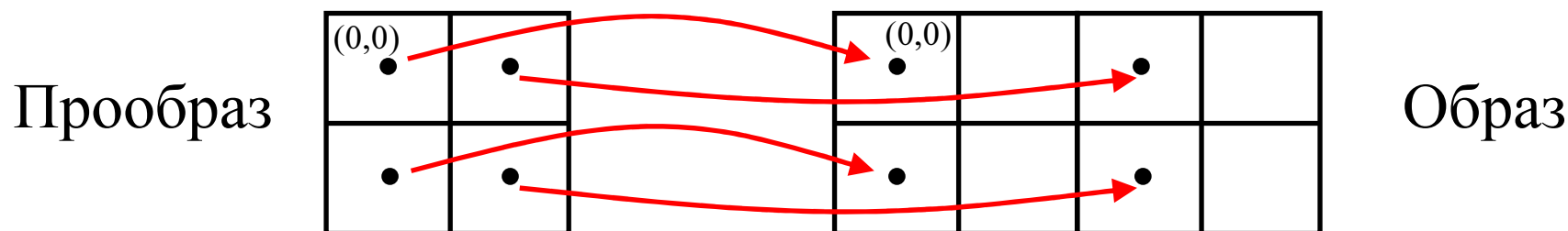
$$x' \rightarrow f_x^{-1}(x', y') = x$$

$$y' \rightarrow f_y^{-1}(x', y') = y$$

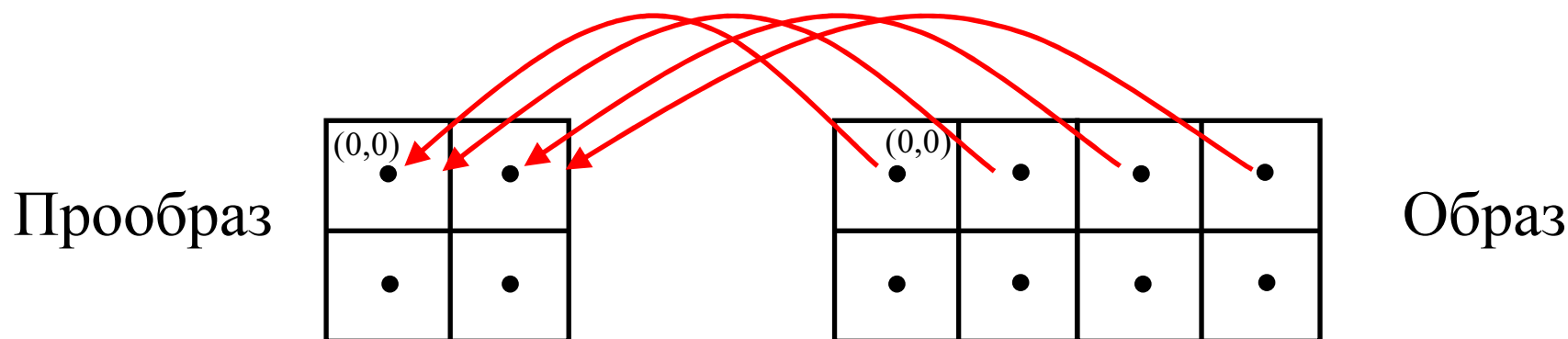


Пример: растяжение по оси X

Прямое отображение: $x' = 2x$ $y' = y$



Обратное отображение: $x = \frac{x'}{2}$ $y = y'$

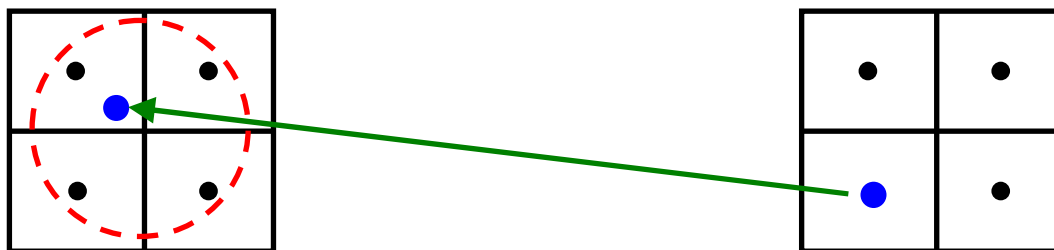


Интерполяция

Что делать, когда значения (x, y) не целые числа?

$$x = f_x^{-1}(x', y')$$

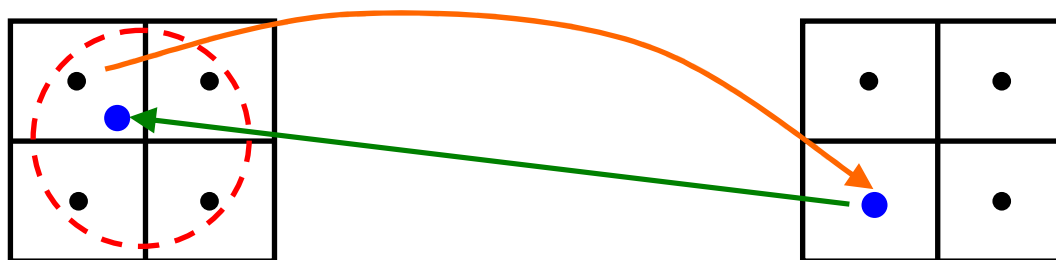
$$y = f_y^{-1}(x', y')$$



Интерполяция – генерация нового пикселя на основе анализа окружающих пикселей

Интерполяция по ближайшему соседу

- Яркость определяется по цвету ближайшего пикселя к прообразу
- Достоинство – быстро работает
- Недостаток – нарушение непрерывности цветовых переходов

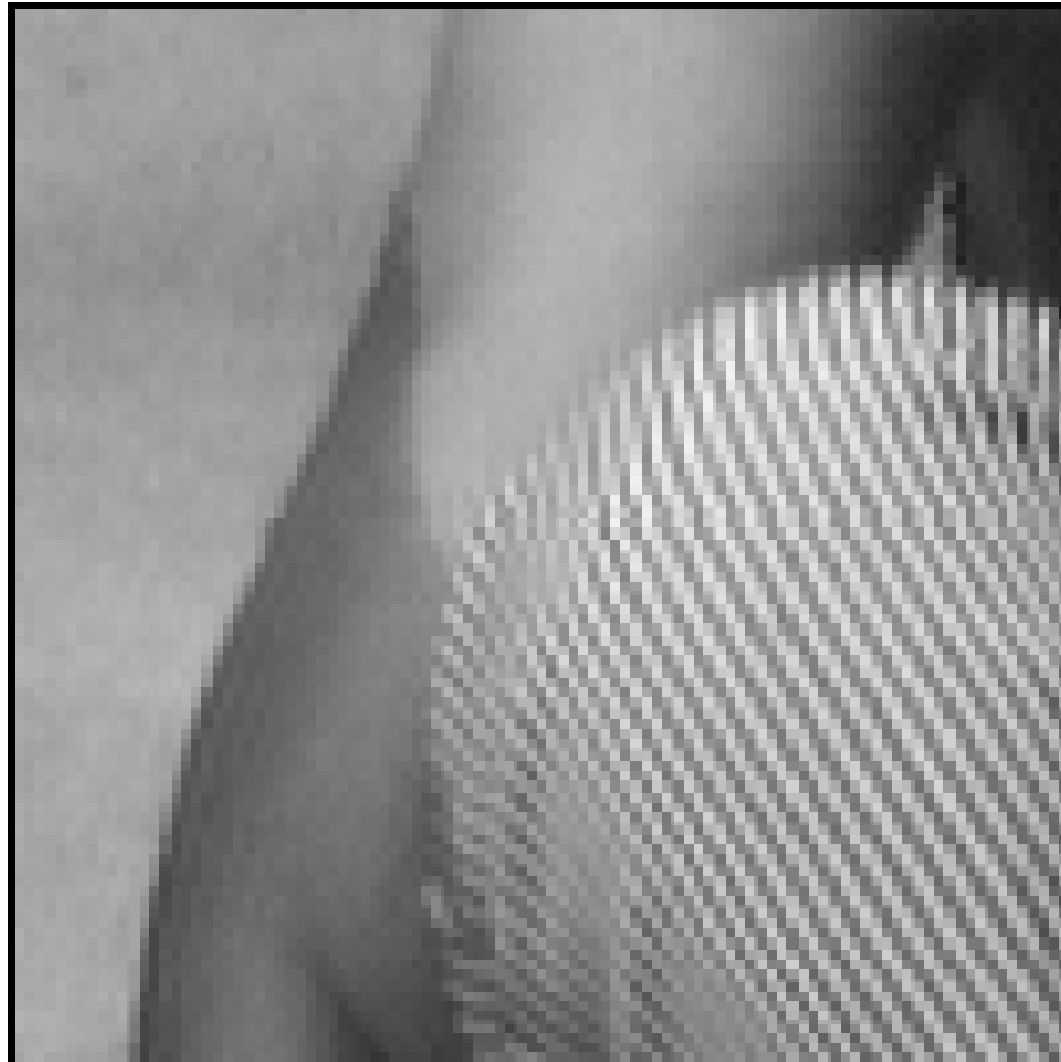
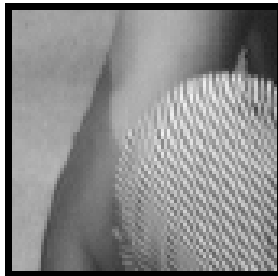


$$I'(x', y') = I(\text{round}[f_x^{-1}(x', y')], \text{round}[f_y^{-1}(x', y')])$$

Пример «поворот»

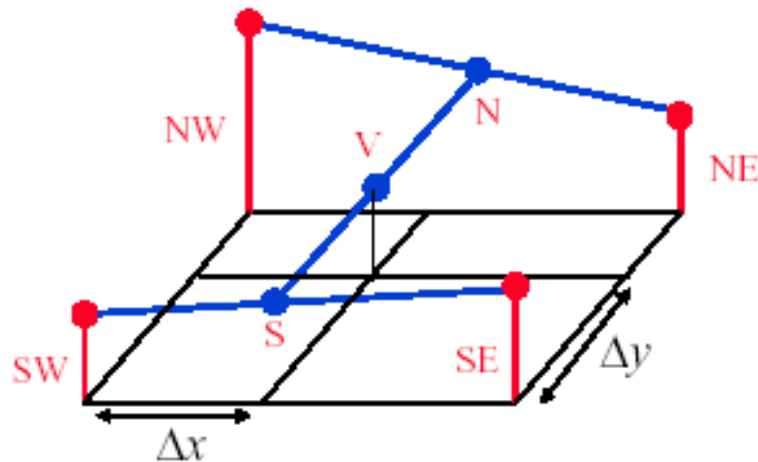
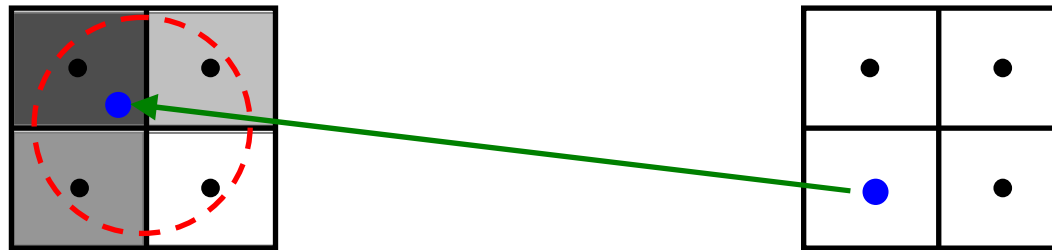


Пример «масштабирование»



Билинейная интерполяция

- Яркость определяется путём интерполяции по цвету между четырьмя ближайшими к прообразу пикселями



$$\begin{aligned} S &= SW \cdot (1 - \Delta x) + SE \cdot \Delta x \\ N &= NW \cdot (1 - \Delta x) + NE \cdot \Delta x \\ V &= S \cdot (1 - \Delta y) + N \cdot \Delta y \end{aligned}$$

Сравнение двух вариантов интерполяции «поворот»

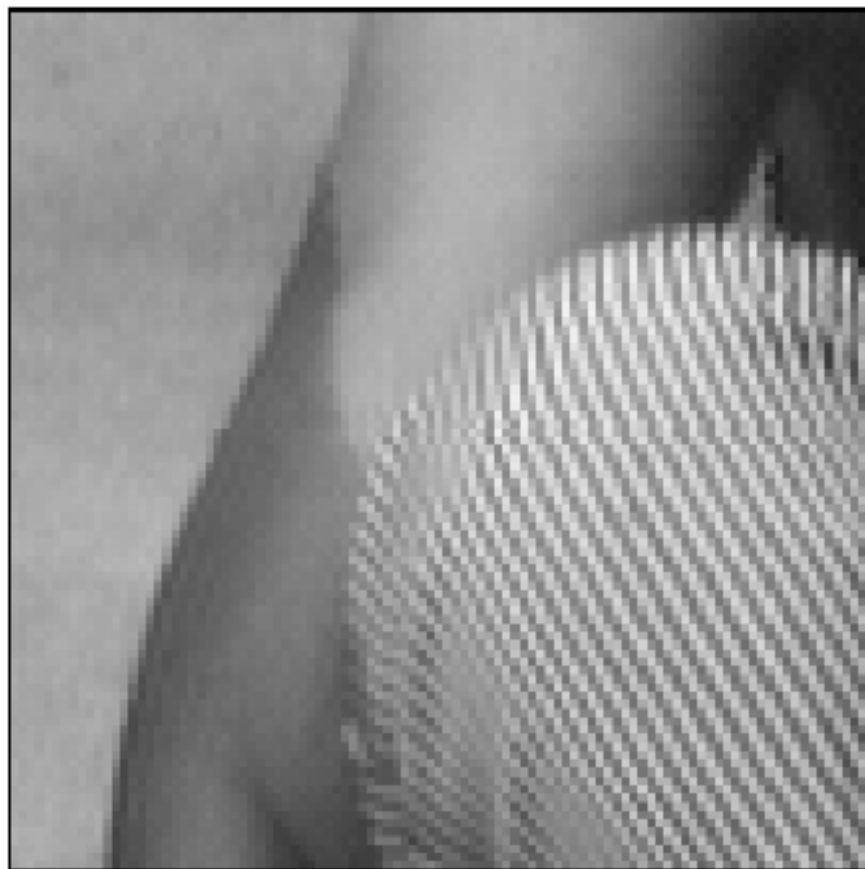


Интерполяция по
ближайшему соседу



Билинейная
интерполяция

Сравнение двух вариантов интерполяции «масштабирование»



Интерполяция по
ближайшему соседу



Билинейная
интерполяция